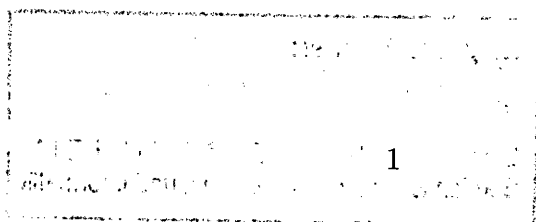


Interpolation mit C^1 -Supersplines auf Klassen von Tetraederzerlegungen

Gero Hecklin

Nr. 269/2003



Interpolation mit C^1 -Supersplines auf Klassen von Tetraederzerlegungen

Gero Hecklin

Institut für Mathematik, Universität Mannheim
68131 Mannheim, Februar 2003

Zusammenfassung

Wir entwickeln eine allgemeine Methode zur Konstruktion von Tetraederzerlegungen Δ , welche für die Interpolation mit trivariaten C^1 Supersplines vom Grad ≥ 6 geeignet sind. Die natürlichen Zerlegungen Δ werden schrittweise induktiv durch Anhängen von Tetraedern definiert. Mit Hilfe von Bézier-Bernstein-Techniken bestimmen wir zunächst die Dimension der Splineräume. Danach konstruieren wir Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Splines hinsichtlich Δ . Hermite-Interpolation tritt hierbei als Grenzfall der Lagrange-Interpolation auf. Die interpolierenden Splines können effizient berechnet werden, indem schrittweise lokal kleine lineare Gleichungssysteme gelöst werden.

AMS Subject Classification: 65D07, 41A63, 65D17, 41A15

Keywords: Trivariate Splines, Interpolation, Tetraederzerlegungen, Bézier-Bernstein-Technik

1. Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir den Raum der trivariaten C^r -Splines vom Grad q mit Super-Differenzierbarkeit Θ hinsichtlich Tetraederzerlegungen Δ eines Grundgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\mathcal{S}_q^{r,\Theta}(\Delta) = \{s \in C^r(\Omega) : s|_T \in \mathcal{P}_q, T \in \Delta \text{ und } s \in C^\Theta(v), v \text{ Eckpunkt von } \Delta\}.$$

Hierbei ist $\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j z^k : i, j, k \geq 0, i + j + k \leq q\}$ der Raum der trivariaten Polynome vom totalen Grad $\leq q$ und $C^r(\Omega)$ die Menge aller r mal differenzierbaren Funktionen auf Ω . Trivariate Splines bilden komplexe Räume, über die bisher wenig bekannt ist. Eine grundlegende Frage in der Theorie ist neben der Bestimmung der Dimension die Konstruktion von Interpolationsmengen. Eine Menge von Punkten $L = \{z_1, \dots, z_m\} \subset \Omega$, wobei m

die Dimension von $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$ ist, heißt Lagrange-Interpolationsmenge für $\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta)$, falls es für jede Funktion $f \in C(\Omega)$ genau ein Spline $s_f \in \mathcal{S}_q^r(\Delta)$ mit der Eigenschaft

$$s_f(z_i) = f(z_i), \quad i = 1, \dots, m$$

gibt. Werden neben Funktionswerten auch partielle Ableitungen einer genügend oft differenzierbaren Funktion f interpoliert, und ist die Gesamtanzahl der Bedingungen gleich m , so sprechen wir von Hermite-Interpolation.

Die vorliegende Literatur über Interpolation mit trivariaten Splines behandelt fast ausschließlich Hermite-Interpolation mit speziellen Räumen, über Lagrange-Interpolation ist derzeit nur wenig bekannt. Eine frühe Arbeit aus der Finite-Elemente Literatur untersucht Supersplines $\mathcal{S}_q^{r,4r}(\Delta)$ hinsichtlich vorgegebener Tetraederzerlegungen Δ mit relativ hohem Polynomgrad $q \geq 8r$ (siehe Ženišek [24]). Lokale Hermite-Interpolation mit C^1 -Splines niederen Grades ist möglich, wenn man ausgehend von einer beliebigen Tetraederzerlegung jeden Tetraeder in 4 (siehe Alfeld [1]) bzw. 12 (siehe Farin und Worsey [23]) Subtetraeder zerlegt. Darüber hinaus wurden trivariate Splines auf vorgegebenen Klassen von Tetraederzerlegungen untersucht. Beispielsweise entwickelten Lai und LeMéhauté [12] solche lokalen Hermite-Interpolationsmethoden für $\mathcal{S}_5^{1,2}(\Delta)$. Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für quintische C^1 -Supersplines auf Tetraederzerlegungen gleichmäßiger Würfelpartitionen wurden kürzlich von Schumaker und Sorokina [21] angegeben. Diese Methode verallgemeinert den Ansatz von Nürnberger, Schumaker und Zeilfelder [16] zur Interpolation mit bivariaten Splines auf sogenannten Schachbrett-Viereckspartitionen. Darüber hinaus wurde vor kurzem die Frage nach der Dimension von C^1 -Splines beliebigen Grades auf natürlichen Tetraederzerlegungen gleichmäßiger Würfelpartitionen untersucht (siehe Hangelbroek, Nürnberger, Rössl, Seidel und Zeilfelder [17]).

Ziel dieser Arbeit ist es, Lagrange- und Hermite-Interpolationsmengen für die Splineräume $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, $q \geq 6$ für allgemeine natürliche Klassen von Tetraederzerlegungen Δ zu konstruieren, wobei kein Tetraeder unterteilt wird. Die Zerlegungen Δ werden dabei induktiv festgelegt, indem ausgehend von einem Starttetraeder Ketten (vgl. Abbildung 1), oder Halbzellen (vgl. Abbildung 2) anhängt werden. Erstere wurden von Alfeld, Schumaker und Whiteley [4] (siehe auch Alfeld, Schumaker und Sirvent [3], Sirvent [22]) 'Oranges' genannt. Mit Hilfe von Bézier-Bernstein-Techniken bestimmen wir zunächst für $q \geq 6$ die Dimension der Splineräume $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$. Dabei benutzen wir ein wohlbekanntes Resultat von de Boor [6] und Farin [10] über charakterisierende Bedingungen für die Bézier-Bernstein-Koeffizienten benachbarter Polynome mit C^r -Eigenschaft über die gemeinsame Dreiecksfläche. Im Anschluss wählen wir geeignete Interpolationspunkte in den Tetraedern der angehängten Ketten und Halbzellen, und konstruieren so schrittweise Lagrange-Interpolationsmengen für den gesamten Splineraum. Hermite-Interpolation entsteht als Grenzwert der Lagrange-Interpolation, ähnlich der bivariaten Methoden von Nürnberger und Zeilfelder [14], welche hier im Kontext der trivariaten Splines verallgemeinert werden. Die interpolierenden Splines werden lokal Schritt für Schritt berechnet, wobei in jedem induktiven Schritt mehrere kleine lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Dies ermöglicht eine effiziente Berechnung der Interpolanten.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 2 erläutern wir einige Grundlagen über trivariate Polynome und Splines, deren stückweise Bézier-Bernstein-Darstellung, minimal bestimmende Mengen und Differenzierbarkeitsbedingungen über Dreiecksflächen benach-

barter Tetraeder. Der Algorithmus zur Konstruktion der für die Interpolation mit Splines geeigneten allgemeinen Klasse von Tetraederzerlegungen Δ wird in Abschnitt 3 beschrieben. In Abschnitt 4 geben wir minimal bestimmende Mengen für $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, $q \geq 6$ an, und bestimmen so die Dimension dieser Splineräume. Darauf basierend behandeln wir in Abschnitt 5 und 6 Hermite- bzw. Lagrange-Interpolation mit diesen Splineräumen. Wir beschreiben die induktive Konstruktion von Interpolationsmengen und beweisen die zentralen Aussagen der Arbeit.

2. Tetraederzerlegungen und Bézier-Bernstein-Techniken

In diesem Abschnitt erläutern wir einige Grundbegriffe der trivariaten Splinetheorie (vgl. Alfeld, Schumaker und Whiteley [4], de Boor [6], Chui [7], Farin [10]).

Sei Ω , eine einfach zusammenhängende polyederförmige Teilmenge des \mathbb{R}^3 , zerlegt in Tetraeder T_1, \dots, T_N , sodass der Durchschnitt zweier verschiedener Tetraeder entweder leer, ein gemeinsamer Eckpunkt, eine gemeinsame Kante oder eine gemeinsame Dreiecksfläche ist. Dann heißt $\Delta = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine TETRAEDERZERLEGUNG VON Ω . Ist $\Delta' \subset \Delta$ eine Tetraederzerlegung einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$, so heißt Δ' SUB-TETRAEDERZERLEGUNG VON Δ .

Analog den Bezeichnungen für Triangulierungen setzen wir

- $V_I(\Delta), V_B(\Delta), V(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Knoten,
- $F_I(\Delta), F_B(\Delta), F(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Flächen
- $E_I(\Delta), E_B(\Delta), E(\Delta)$: Menge der inneren, der äußeren bzw. aller Kanten, und
- $N(\Delta)$: Menge der Tetraeder

der Tetraederzerlegung Δ .

Für $r, q \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq r \leq q$ und eine Tetraederzerlegung Δ bezeichnet

$$\mathcal{S}_q^r(\Delta) = \{s \in C^r(\Delta) : s|_T \in \mathcal{P}_q \text{ für alle } T \in \Delta\}$$

den Splineraum der r mal differenzierbaren Funktionen vom Grad q . Dabei ist

$$\mathcal{P}_q = \text{span}\{x^i y^j z^k : i, j, k \geq 0, i + j + k \leq q\}$$

der $\binom{q+3}{3}$ dimensionale Raum der trivariaten Polynome vom totalen Grad $\leq q$. Funktionen aus $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ sind also stückweise Polynome vom Grad q , die r mal stetig differenzierbar über den Dreiecksflächen der Tetraeder von Δ verknüpft sind.

Sei $\rho_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, d := \#V(\Delta)$ mit $r \leq \rho_i < q$ gegeben. Dann definiert für $\theta = (\rho_1, \dots, \rho_d)$

$$\mathcal{S}_q^{r,\theta}(\Delta) = \{s \in \mathcal{S}_q^r(\Delta) : s \in C^{\rho_i}, i = 1, \dots, d\}$$

den SUPERSPLINERAUM VON $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$ vom Grad θ , einen Teilraum von $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$.

Wie in der bivariaten Theorie gibt es im dreidimensionalen die sogenannte Bézier-Bernstein-Darstellung von Polynomen. Sei $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ ein Tetraeder im \mathbb{R}^3 . Dann gibt es für alle $z \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmte baryzentrische Koordinaten ϕ_1, \dots, ϕ_4 mit $\sum_{i=1}^4 \phi_i = 1$ und der Interpolationseigenschaft $\phi_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, sodass sich z schreiben lässt als

$$z = \sum_{i=1}^4 \phi_i(z) \cdot v_i.$$

Für einen Tetraeder T und $(i, j, k, l) \in \mathbb{N}^4$ mit $i + j + k + l = q$ definiert $B_{i,j,k,l}^q \in \mathcal{P}_q$, gegeben durch

$$B_{i,j,k,l}^q(z) = \frac{q!}{i! \cdot j! \cdot k! \cdot l!} (\phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k \phi_4^l)(z), \quad z \in T$$

ein BERNSTEIN-POLYNOM vom Grad q bzgl. T . Die Menge aller Bernstein-Polynome vom Grad q bildet eine Basis von \mathcal{P}_q . Daher lässt sich jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_q$ in eindeutiger Weise in seiner sogenannten BÉZIER-BERNSTEIN-DARSTELLUNG

$$p(z) = \sum_{i+j+k+l=q} a_{i,j,k,l}^{[T]} \cdot B_{i,j,k,l}^q(z), \quad z \in T$$

schreiben. Die reellen Koeffizienten

$$a_{i,j,k,l}^{[T]}, \quad i + j + k + l = q$$

sind dabei die trivariaten BÉZIER-BERNSTEIN-KOEFFIZIENTEN über den gleichverteilten BÉZIER-BERNSTEIN-PUNKTEN

$$\left\{ P_{i,j,k,l}^{[T]} = \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3 + lv_4}{q}, \quad i + j + k + l = q \right\}.$$

Sei $M(\Delta)$ die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte von Δ und für alle $i + j + k + l = q$ und alle Tetraeder $T \in \Delta$ das lineare Funktional

$$\lambda_{P_{i,j,k,l}^{[T]}} : \mathcal{S}_q^r(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{d.d.} \quad s \longrightarrow \lambda_{P_{i,j,k,l}^{[T]}}(s) = a_{i,j,k,l}^{[T]}$$

gegeben. Dann heißt $M \subset M(\Delta)$ eine BESTIMMENDE MENGE für $\mathcal{S}_q^r(\Delta)$, falls gilt

$$\lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in M \quad \implies \quad \lambda_P(s) = 0 \quad \forall P \in M(\Delta).$$

M heißt MINIMAL, falls es keine bestimmende Menge mit weniger Elementen gibt.

Durch einer Verallgemeinerung der Aussage von Farin [10] lässt sich nach de Boor [6] die C^r -Stetigkeit über den gemeinsamen Flächen der Tetraeder wie im bivariaten durch Bedingungen an die Bézier-Bernstein-Koeffizienten charakterisieren. Seien $T_1 = \Delta(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $T_2 = \Delta(v_1, v_2, v_3, v_5)$ zwei Tetraeder mit gemeinsamer Dreiecksfläche $\Delta(v_1, v_2, v_3)$ und $s \in \mathcal{S}_q^0(\{T_1, T_2\})$ definiert durch $s|_{T_m} = p_m \in \mathcal{P}_q$ für $m = 1, 2$ auf T_m , gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[m]}$.

Lemma 2.1:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $s \in C^r(\{T_1, T_2\})$

(ii) Für $\rho = 0, \dots, r$ und $i + j + k = q - \rho$ gilt

$$a_{i,j,k,\rho}^{[2]} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=\rho} a_{i+\alpha,j+\beta,k+\gamma,\delta}^{[1]} \frac{\rho!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!} (\phi_1^\alpha \phi_2^\beta \phi_3^\gamma \phi_4^\delta)(v_5).$$

Für C^1 -Stetigkeit über der gemeinsamen Fläche bedeutet dies, dass für alle $i + j + k = q - 1$ gilt

$$a_{i,j,k,1}^{[2]} = a_{i+1,j,k,0}^{[1]} \phi_1(v_5) + a_{i,j+1,k,0}^{[1]} \phi_2(v_5) + a_{i,j,k+1,0}^{[1]} \phi_3(v_5) + a_{i,j,k,1}^{[1]} \phi_4(v_5).$$

Sei $d \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor und p eine genügend oft differenzierbare Funktion. Dann bezeichnen wir mit $p_d(z)$ die partielle Ableitung von p im Punkt z in Richtung d . Ist $\{d_1, d_2, d_3\} \subset \mathbb{R}^3$ eine linear unabhängige Menge von Einheitsvektoren, so heißt

$$D^w p(z) = (p_{d_1^w}(z), p_{d_1^{w-1}d_2}(z), p_{d_1^{w-1}d_3}(z), \dots, p_{d_1d_3^{w-1}}(z), p_{d_2d_3^{w-1}}(z), p_{d_3^w}(z))$$

der GEORDNETE VEKTOR DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN vom Grad w . Nach Farin [10], de Boor [6] gilt:

Lemma 2.2:

Die r -te Richtungsableitung des Bézier-Bernstein-Polynoms $B_{i,j,k,l}^q$ entlang eines Einheitsvektors $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^3$ ist für alle $z = (\phi_1(z), \phi_2(z), \phi_3(z), \phi_4(z))$ gegeben durch

$$(B_{i,j,k,l}^q)_{\lambda^r}(z) = \frac{q!}{(q-r)!} \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=r} B_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^r(\lambda) B_{i-\alpha,j-\beta,k-\gamma,l-\delta}^{q-r}(z), \quad i + j + k + l = q.$$

Damit läßt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen tri-variater Polynome und den Koeffizienten ihrer Bézier-Bernstein-Darstellung herleiten (vgl. Farin [10], Nürnberger und Zeilfelder [14]). Sei $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ und $p \in \mathcal{P}_q$ definiert durch

$$p(z) = \sum_{i+j+k+l=q} a_{i,j,k,l} B_{i,j,k,l}^q(z), \quad z \in T.$$

Ferner sei d_i für $i = 1, \dots, 3$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $[v_1, v_{i+1}]$.

Lemma 2.3:

Für $\alpha + \beta + \gamma \leq q$ gilt

$$p_{d_1^\alpha d_2^\beta d_3^\gamma}(v_1) = \frac{q!}{(q-\alpha-\beta-\gamma)!} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\gamma} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \binom{\gamma}{l} \cdot (\phi_1)_{d_1}^{\alpha-j} (\phi_1)_{d_2}^{\beta-k} (\phi_1)_{d_3}^{\gamma-l} (\phi_2)_{d_1}^j (\phi_3)_{d_2}^k (\phi_4)_{d_3}^l \cdot a_{q-j-k,l,j,k,l},$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
a_{q-\alpha-\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma} &= \frac{(q-\alpha-\beta-\gamma)!}{q!(\phi_2)_{d_1}^\alpha (\phi_3)_{d_2}^\beta (\phi_4)_{d_3}^\gamma} p_{d_1^\alpha d_2^\beta d_3^\gamma}(v_1) - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \cdot a_{q-j-\beta-\gamma,j,\beta,\gamma} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta-1} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \left(\frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \left(\frac{(\phi_1)_{d_2}}{(\phi_3)_{d_2}} \right)^{\beta-k} \cdot a_{q-j-k-\gamma,j,k,\gamma} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} \sum_{l=0}^{\gamma-1} \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{k} \binom{\gamma}{l} \left(\frac{(\phi_1)_{d_1}}{(\phi_2)_{d_1}} \right)^{\alpha-j} \left(\frac{(\phi_1)_{d_2}}{(\phi_3)_{d_2}} \right)^{\beta-k} \left(\frac{(\phi_1)_{d_3}}{(\phi_4)_{d_3}} \right)^{\gamma-l} \cdot a_{q-j-k-l,j,k,l}.
\end{aligned}$$

Damit können die partiellen Ableitungen $p_{d_1^j d_2^k d_3^l}(v_1)$, $j = 0, \dots, \alpha$, $k = 0, \dots, \beta$ und $l = 0, \dots, \gamma$ in eindeutiger Weise aus den Bézier-Bernstein-Koeffizienten $a_{q-j-k-l,j,k,l}$ und umgekehrt die Bézier-Bernstein-Koeffizienten $a_{q-j-k-l,j,k,l}$, $j = 0, \dots, \alpha$, $k = 0, \dots, \beta$ und $l = 0, \dots, \gamma$ in eindeutiger Weise aus den partiellen Ableitungen $p_{d_1^j d_2^k d_3^l}(v_1)$ berechnet werden.

3. Konstruktion von Tetraederzerlegungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Algorithmus zur Konstruktion einer allgemeinen Klasse von Tetraederzerlegungen Δ an. Grundprinzip ist dabei, ausgehend von einem Starttetraeder, Schritt für Schritt geeignete Tetraeder zur bisherigen Subtetraederzerlegung hinzuzufügen, und so Δ induktiv zu konstruieren.

Im ersten Schritt wählen wir vier Punkte im \mathbb{R}^3 , die nicht alle in einer Ebene liegen, verbinden sie zu einem Tetraeder $T_0 = \Omega_0 = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ und setzen $\Delta_0 = \{T\}$. Ausgehend von einer Subtetraederzerlegung Δ_{n-1} wählen wir geeignete weitere Punkte in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{n-1}$ und verbinden sie mit den bisherigen Knoten. Angenommen Δ_{n-1} ist bereits konstruiert, dann gibt es zwei Alternativen:

1. Möglichkeit: Anhängen einer Kette;

Wähle vier Knoten $v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,4} \in V_B(\Delta_{n-1})$ auf dem Rand von Ω_{n-1} , die zwei benachbarte Dreiecksflächen $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,3})$, $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,4}) \in F_B(\Delta_{n-1})$ mit gemeinsamer Kante $[v_{n-1,1}, v_{n-1,2}]$ bilden. Jetzt wähle geeignete neue Punkte $w_{n,1}, \dots, w_{n,k_n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{n-1}$ und setze $w_{n,0} := v_{n-1,3}$ sowie $w_{n,k_n+1} := v_{n-1,4}$. Verbinde die Knoten zu den Tetraedern

$$T_{n,m} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m}, w_{n,m+1}), \quad m = 0, \dots, k_n - 1$$

und

$$T_{n,k_n} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n+1}, w_{n,k_n}),$$

(vgl. Abbildung 1) und setze $\Omega_n := \Omega_{n-1} \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k_n} T_{n,i} \right)$ sowie $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,i}, i = 0, \dots, k_n\}$ die Subtetraederzerlegung von Ω_n . Geeignete neue Punkte sind dabei solche, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Alle Flächen $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$, $i = 0, \dots, k_n + 1$ liegen in paarweise verschiedenen Ebenen.
- (ii) Die Flächen $\Delta(v_{n-1,1}, w_{n,i-1}, w_{n,i})$ und $\Delta(v_{n-1,1}, w_{n,i}, w_{n,i+1})$ für $i = 1, \dots, k_n + 1$ sowie $\Delta(v_{n-1,2}, w_{n,i-1}, w_{n,i})$ und $\Delta(v_{n-1,2}, w_{n,i}, w_{n,i+1})$ für $i = 1, \dots, k_n + 1$ liegen in verschiedenen Ebenen.
- (iii) Alle Dreiecksflächen von Δ_n mit gemeinsamer Kante $[w_{n,0}, v_{n-1,1}]$ bzw. $[w_{n,0}, v_{n-1,1}]$, $[w_{n,0}, v_{n-1,1}]$ oder $[w_{n,0}, v_{n-1,1}]$ liegen in paarweise verschiedenen Ebenen.

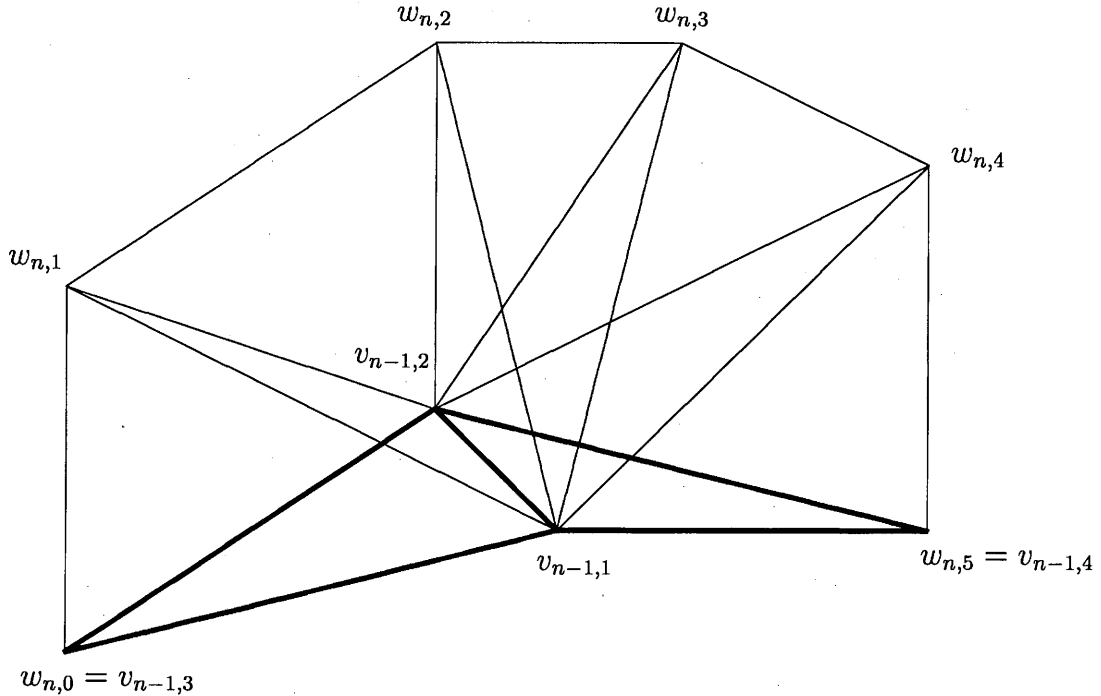


Abb. 1: Angehängte Kette für $k_n = 4$ in Möglichkeit 1.

2. Möglichkeit: Anhängen einer Halbzelle;

Wähle Knoten $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_{n-1})$ auf dem Rand von Ω_{n-1} , die eine Zelle $\Delta_{v_{n-1,0}}$ mit Randknoten $v_{n-1,i}$, $i = 1, \dots, k_n$ bilden. Jetzt wähle einen geeigneten neuen Punkt $w_{n,1} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{n-1}$, verbinde die Knoten zu den Tetraedern

$$T_{n,m} = \Delta(w_{n,1}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1}, v_{n-1,0}), \quad m = 1, \dots, k_n$$

(vgl. Abbildung 2) und setze $\Omega_n := \Omega_{n-1} \cup (\cup_{i=1}^{k_n} T_{n,i})$ sowie $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,i}, i = 1, \dots, k_n\}$, die zu Ω_n gehörige Subtetraederzerlegung. Ein neuer Punkt ist dabei geeignet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sein:

- (i) k_n ist ungerade und kleiner als zehn.
- (ii) Alle Dreiecke $\Delta(v_{n-1,0}, w_{n,1}, v_{n-1,i})$, $i = 1, \dots, k_n$ liegen in paarweise verschiedenen Ebenen.

- (iii) $\Delta(w_{n,1}, v_{n-1,i-1}, v_{n-1,i})$ und $\Delta(w_{n,1}, v_{n-1,i}, v_{n-1,i+1})$ liegen in verschiedenen Ebenen, für $i = 1, \dots, k_n$.
- (iv) Alle Flächen von Δ_n mit gemeinsamer Kante $[v_{n-1,i}, v_{n-1,i+1}]$ besitzen paarweise verschiedene Steigungen, für $i = 1, \dots, k_n - 1$.

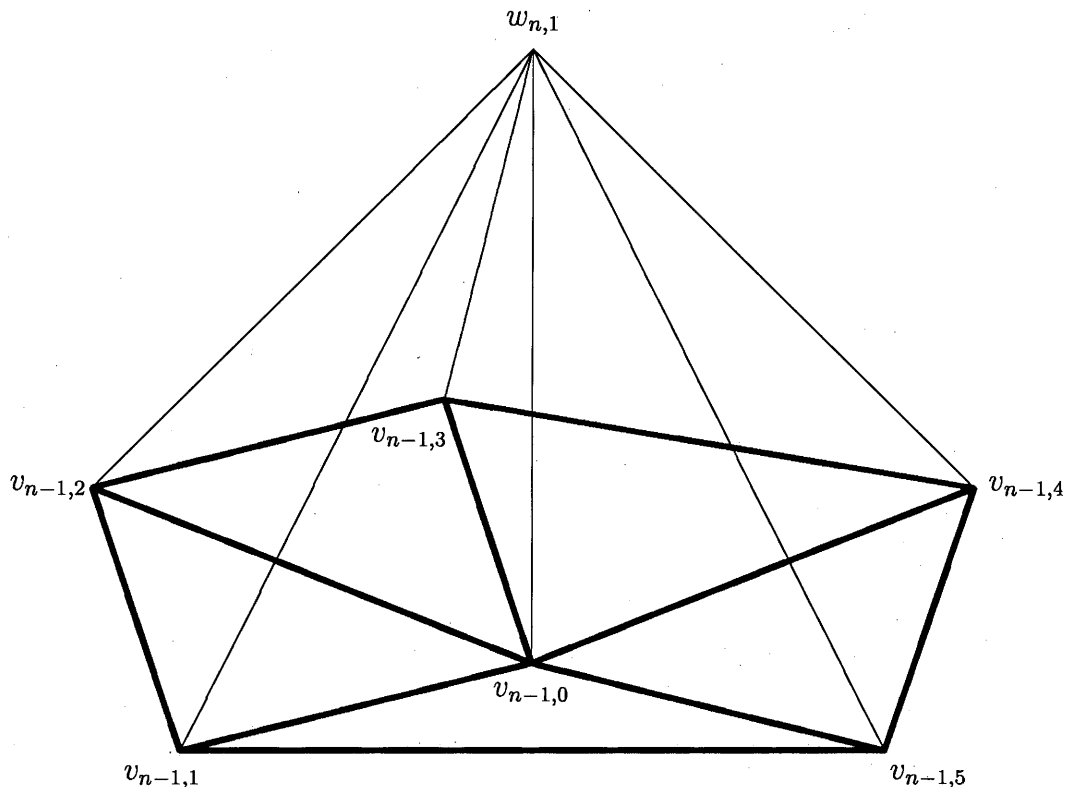


Abb. 2: Angehängte Halbzelle für $k_n = 5$ in Möglichkeit 2.

Bemerkung 3.1:

- a) Werden Tetraeder nach Möglichkeit 1 angehängt, so ändert sich die Anzahl der inneren Knoten der Tetraederzerlegung nicht, d.h. kein Knoten, der vor dem Schritt auf dem Rand von Ω_{n-1} lag, ist nach Anhängen einer Kette im Innern von Ω_n .
- b) Seien $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_{n-1})$ Knoten, die eine Zelle $\Delta_{v_{n-1,0}}$ geraden Grades bilden. Dann kann hier keine Halbzelle (Möglichkeit 2) angehängt werden. Wir fügen jetzt zuerst für geeignete Knoten $v_{n-1,0}, v_{n-1,i-1}, \dots, v_{n-1,i+1}$ mit $1 \leq i \leq k_n$ eine Kette hinzu, wobei genau zwei Knoten $w_{n,1}, w_{n,2}$ neu gewählt werden. Dadurch entsteht auf dem Rand von Ω_n durch die Knoten $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,i-1}, w_{n,1}, w_{n-1,2}, v_{n-1,i+1}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_n)$ eine neue Zelle vom Grad $k_{n+1} = k_n + 1$, also ungerade. Nun kann im nächsten Schritt eine Halbzelle angehängt werden.

4. Die Dimension von $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, $q \geq 6$

In diesem Abschnitt bestimmen wir für $q \geq 6$ die Dimension der Splineraums $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ auf Tetraederzerlegungen wie in Paragraph 3 konstruiert. Dazu definieren wir Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten, die wir induktiv den Tetraedern von Δ zuordnen. Insgesamt erhalten wir die Punkte $\{P_{i,j,k,l}^{[T_m]} \mid P_{i,j,k,l} \text{ wird dem Tetraeder } T_m \text{ zugeordnet}\}$. In Theorem 4.1 beweisen wir, dass die Vereinigung aller dadurch ausgewählten Bézier-Bernstein-Punkte eine minimal bestimmende Menge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ bildet. Sei

$$Q_q := \{P_{i,j,k,l} \mid i+j+k+l = q; i, j, k, l \geq 0\}, \quad q \geq 6,$$

$$A_q := \{P_{i,j,k,l} \in Q_q \mid i, j, k \leq q-4; l \geq 2\}, \quad q \geq 6,$$

$$B_q := \begin{cases} A_6 \setminus \{P_{0,1,2,3}, P_{2,2,0,2}\}, & q = 6, \\ A_q \setminus \{P_{2,q-4,0,2}, \dots, P_{q-4,2,0,2}\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$C_q := \{P_{i,j,k,l} \in Q_q \mid i, j \leq q-4; 2 \leq k, l \leq q-4\}, \quad q \geq 6,$$

$$D_q := \begin{cases} \{P_{0,2,2,2}, P_{1,2,1,2}\}, & q = 6, \\ \{P_{i,j,k,2} \mid 2 \leq j \leq q-4; k \geq 1\} \cup \{P_{i,j,k,l} \mid 2 \leq j \leq q-4; 3 \leq l \leq q-4\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$E_q^d := \begin{cases} D_6 \cup \{P_{i,j,k,l} \mid l \geq 4\} \cup \begin{cases} \{P_{i,j,k,3} \mid i, j, k \leq 2; (i, j, k) \neq (0, 1, 2)\}, & d = 3, \\ \{P_{i,j,k,3} \mid 1 \leq i \leq 2; k \leq 1\}, & d = 5, \\ \{P_{i,j,k,3} \mid i = 2\}, & d = 7, \\ \emptyset, & d = 9, \end{cases} & q = 6, \\ D_q \cup \{P_{i,j,k,l} \mid i \leq q-4; j, k \leq 1; 3 \leq l \leq q-3\} \cup \{P_{i,j,k,l} \mid l \geq q-2\}, & q \geq 7. \end{cases}$$

Sei Δ eine in Paragraph 3 konstruierte Tetraederzerlegung. Dann ordnen wir den Tetraedern von Δ_0 und $\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$ folgende Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten zu (vgl. Abbildung 3). Für jeden Tetraeder $T = \Delta(u, v, w, x) \in \Delta$ ist dabei i der zu u , v der zu j , k der zu w und l der zum Eckpunkt x gehörige Index des Bézier-Bernstein-Punkts $P_{i,j,k,l}^{[T]}$. Wir ordnen

- dem Starttetraeder $T_0 = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ die Menge Q_q zu.

Hängen wir im Induktionsschritt eine Kette an, so ordnen wir

- den Tetraedern $T_{n,m} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,m}, w_{n,m+1})$, $m = 0, \dots, k_n - 2$ die Menge A_q zu,
- dem Tetraeder $T_{n,k_n-1} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n-1}, w_{n,k_n})$ die Menge B_q , und
- dem Tetraeder $T_{n,k_n} = \Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n+1}, w_{n,k_n})$ die Menge C_q .

Hängen wir im Induktionsschritt eine Halbzelle an, so ordnen wir

- den Tetraedern $T_{n,m} = \Delta(w_{n,1}, v_{n-1,i}, v_{n-1,m+1}, v_{n-1,0})$, $m = 2, \dots, k_n$ die Menge D_q zu, und
- dem Tetraeder $T_{n,1} = \Delta(w_{n,1}, v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,0})$ die Menge E_q^d zu. Dabei ist $d = k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$ der Grad der Zelle $\Delta_{v_{n-1,0}}$ auf dem Rand von Ω_{n-1} .

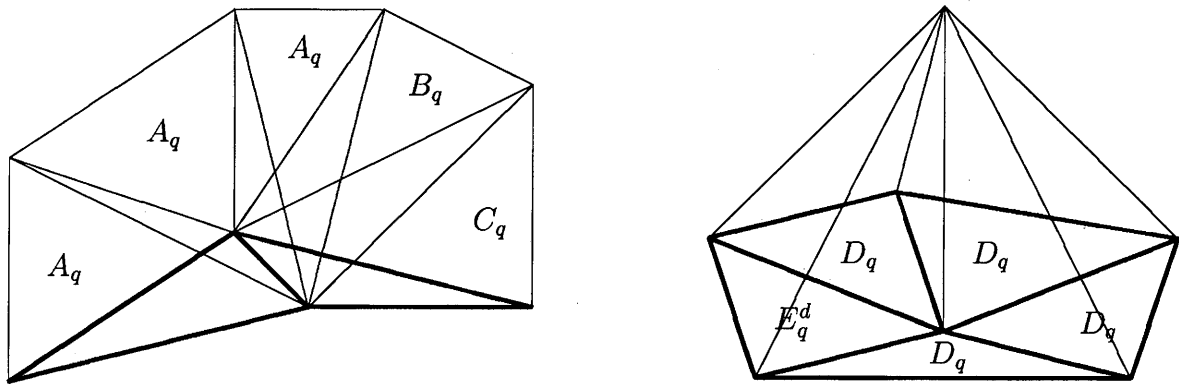


Abb. 3: Zugeordnete Mengen für angehängte Tetraeder.

Theorem 4.1:

Sei $q \geq 6$, Δ wie in Paragraph 3 konstruiert, und M_q die Menge aller in den Tetraedern von Δ gewählten Bézier-Bernstein-Punkte. Dann ist M_q eine minimal bestimmende Menge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, und es gilt:

$$\dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)) = \#M_q.$$

Beweis:

Sei $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, und für alle Tetraeder $T \in \Delta$ das trivariate Polynom $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$ gegeben in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung mit Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T]} \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass zu jeder Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend der Menge M_q , $q \geq 6$ genau ein Spline in $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$ existiert, der diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt. Dann ist M_q , $q \geq 6$ eine minimal bestimmende Menge für $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$.

Die Menge der in T_0 gewählten Punkte $Q_q = M_q \cap T_0$ ist die Menge aller Bézier-Bernstein-Punkte des Dreiecks T_0 . Also gibt es zu jeder Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend der Punkte in Q_q nur genau ein Polynom auf T_0 mit diesen Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Sei jetzt bereits gezeigt, dass $s|_{\Omega_{n-1}}$ eindeutig bestimmt ist, dann betrachten wir die Subtetraederzerlegung Δ_n . Dabei unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: Anhängen einer Kette;

Durch die C^1 -Stetigkeit über der Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,0})$ und der Supersplineeigenschaft im Knoten $w_{n,1}$ sind die Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,0}]}$, $l = 0, 1$ sowie $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,0}]}$ für i, j oder $k \geq q - 3$, $l \geq 2$ nach Lemma 2.1 eindeutig bestimmt. Gibt man nun reelle Koeffizienten entsprechend der Bézier-Bernstein-Punkte von $A_q = M_q \cap T_{n-1,0}$ auf $T_{n-1,0}$ vor, so sind auch die verbleibenden Bézier-Bernstein-Koeffizienten in diesem Tetraeder eindeutig festgelegt, und es gibt genau ein Polynom $p^{[T_{n,0}]}$ mit diesen Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung. Mit analogem Argument folgt die Eindeutigkeit der Polynome $p^{[T_{n,m}]}$, $m = 1, \dots, k_n - 2$.

Betrachten wir nun T_{n,k_n-1} und geben dort reelle Koeffizienten entsprechend der Menge $B_q = M_q \cap T_{n,k_n-1}$ vor. Die C^1 -Stetigkeit über der Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n-1})$ und die Supersplineeigenschaft im Knoten w_{n,k_n-1} liefern wie oben nach Lemma 2.1 die Eindeutigkeit der Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n-1}]}$, $l = 0, 1$ sowie $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n-1}]}$ für i, j oder $k \geq q - 3$, $l \geq 2$. Da die drei Flächen $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$, $i = k_n - 1, \dots, k_n + 1$ nach Konstruktion in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, sind mit den C^1 -Stetigkeit über $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$ die Koeffizienten $a_{2+i,q-4-i,0,2}^{[T_{n,k_n-1}]}$, $i = 0, \dots, q - 6$, nach Lemma 2.1 ebenfalls eindeutig bestimmt. Im Fall $q = 6$ folgt mit der C^3 -Supersplineeigenschaft im Knoten w_{n,k_n} nach Lemma 2.1 auch die Eindeutigkeit des Koeffizienten $a_{0,1,2,3}^{[T_{n,k_n-1}]}$. Dabei wird der Koeffizient $a_{0,0,3,3}^{[T_{n,k_n}]}$, der durch die Supersplineeigenschaft in w_{n,k_n+1} bestimmt ist, verwendet. Somit sind im Tetraeder T_{n,k_n-1} alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten eindeutig festgelegt. Es gibt daher genau ein Polynom $p^{[T_{n,k_n-1}]}$ mit diesen Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung.

Im verbleibenden Tetraeder T_{n,k_n} sind durch die C^1 -Stetigkeit über den Dreiecksflächen $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$, $i = k_n, k_n + 1$ nach Lemma 2.1 die Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n}]}$, $k \leq 1$ oder $l \leq 1$, sowie durch die Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n}$ und w_{n,k_n+1} die Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,k_n}]}$, wobei i, j, k oder $l \geq q - 3$ und $k, l \geq 2$, eindeutig bestimmt. Werden nun Bézier-Bernstein-Koeffizienten entsprechend der Punkte in $C_q = M_q \cap T_{n,k_n}$ auf T_{n,k_n} vorgegeben, so gibt es auch im letzten Tetraeder nur genau ein Polynom $p^{[T_{n,k_n}]}$, das diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt. Insgesamt ist damit $s|_{\Omega_n}$ eindeutig bestimmt.

Fall 2: Anhängen einer Halbzelle;

Durch die C^1 -Stetigkeit über den Flächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1})$, $m = 1, \dots, k_n$ sind nach Lemma 2.1 die Bézier-Bernstein-Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,m}]}$ für $l \leq 1$, $m = 1, \dots, k_n$ eindeutig bestimmt. Die Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,0}, v_{n-1,m}$ und $v_{n-1,m+1}$ liefert zusätzlich die Eindeutigkeit der Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,m}]}$, i, j oder $k \geq q - 3$, $l \geq 2$ für $m = 1, \dots, k_n$.

Da jeweils die drei Dreiecksflächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m-1})$, $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$ und $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1})$ für $m = 1, \dots, k_n$ nach Konstruktion in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, sind mit den C^1 -Stetigkeit über diesen Kanten nach Lemma 2.1 die Koeffi-

zienten $a_{2+j,q-4-j,0,2}^{[T_{n,m}]}$, $j = 0, \dots, q-6$ für $m = 1, \dots, k_n$ eindeutig bestimmt.

Geben wir reelle Koeffizienten entsprechen der Punkte in $E_q^d = M_q \cap T_{n,1}$ auf dem Tetraeder $T_{n,1}$ vor, so sind durch die C^1 -Stetigkeit über der Kante $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$ nach Lemma 2.1 die Koeffizienten $a_{3+i,0,1,q-4-i}^{[T_{n,m}]}$, $i = 0, \dots, q-7$ für $m = 2, \dots, k_n - 1$ eindeutig bestimmt. Bei Vorgabe reeller Koeffizienten entsprechend der Punkte in $D_q = M_q \cap T_{n,m}$ auf den Tetraedern $T_{n,m}$, $m = 2, \dots, k_n$, lassen sich durch die C^1 -Stetigkeit über den Flächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$, $m = 1, \dots, k_n$ die Koeffizienten $a_{i,1,k,l}^{[T_{n,m}]}$, $2 \leq k \leq q-4$, $2 \leq l \leq q-4$ nach Lemma 2.1 eindeutig berechnen. Die Bézier-Bernstein-Koeffizienten $a_{2+i,1,1,q-4-i}^{[T_{n,m}]}$, $i = 0, \dots, q-6$ für $m = 1, \dots, k_n$ ergeben sich mit der C^1 -Stetigkeit über der Kante $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$ durch ein lineares Gleichungssystem (vgl. Alfeld, Piper und Schumaker [..]). Für $q = 6$ liefert die C^3 -Supersplineeigenschaft im Knoten $w_{n,1}$ zusammen mit den entsprechend der Menge E_6^d gegebenen Koeffizienten für $d \in \{3, 5, 7, 9\}$ nach Lemma 2.1 die fehlenden Koeffizienten in $\{a_{i,j,k,q-3}^{[T_{n,m}]}, i+j+k=3, m=1, \dots, k_n\}$. Für alle $q \geq 6$ ergeben sich die Koeffizienten $a_{i,j,k,l}^{[T_{n,m}]}$, $l = q-2, \dots, q$ für $m = 1, \dots, k_n$ durch die im Tetraeder $T_{n,1}$ vorgegebenen Koeffizienten mit der Supersplineeigenschaft im Knoten $w_{n,1}$.

Insgesamt sind damit alle Bézier-Bernstein-Koeffizienten auf $\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$ eindeutig bestimmt. Es gibt für $q \geq 6$ und $m = 1, \dots, k_n$ daher nur genau ein Polynom $p^{[T_{n,m}]} \in \mathcal{P}_q$, das diese Koeffizienten in seiner Bézier-Bernstein-Darstellung besitzt, d.h. $s|_{\Omega_n}$ ist eindeutig bestimmt.

Da die Tetraederzerlegung induktiv durch Anhängen von Ketten und Halbzellen entsteht, ist $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, $q \geq 6$ auf ganz Ω eindeutig bestimmt. Also ist M_q eine minimal bestimmende Menge dieses Splineraums.

#

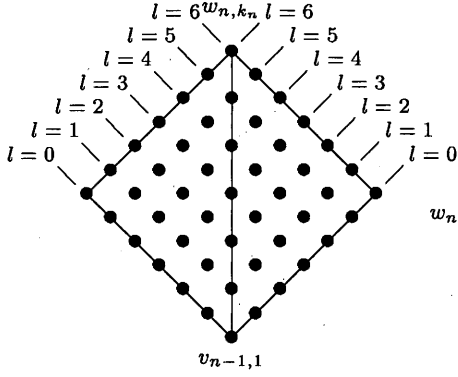
Beispiel 4.2:

In Abbildung 4 sehen wir für $q = 6$ die Bézier-Bernstein-Koeffizienten zweier als Kette angehängter Tetraeder von der Seite, bzw. von oben. Für $l = 0, 1$ sind Koeffizienten durch die C^1 -Stetigkeit über den Flächen von $F_B(\Delta_{n-1})$ eindeutig bestimmt, die Supersplineeigenschaft im Knoten w_{n,k_n} liefert mit gegebenen Koeffizienten entsprechend B_q in eindeutiger Weise alle Koeffizienten mit $l = 4, \dots, 6$. Für $l = 2, 3$ sind die Bézier-Bernstein-Koeffizienten aus folgenden Gründen eindeutig:

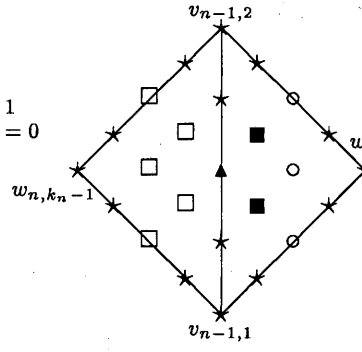
- ★: Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,i}$, $i = 1, \dots, 4$,
- ▲: C^1 -Stetigkeit über der Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$,
- : Punktmenge B_6 ,
- : C^1 -Stetigkeit über der Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$ mit den Koeffizienten □,
- : Punktmenge C_6 ,
- : Supersplineeigenschaft im Knoten w_{n,k_n} mit den Koeffizienten □ und ★.

Abbildung 5 zeigt die Bézier-Bernstein-Koeffizienten einer angehängten Halbzelle für $q = 6$ und $d = 5$. Die Koeffizienten mit $l = 0, 1$ sind durch die C^1 -Stetigkeit über den Flächen von

seitlich:



von oben, $l = 2$:



von oben, $l = 3$:

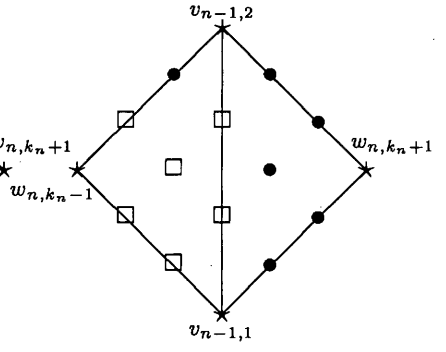
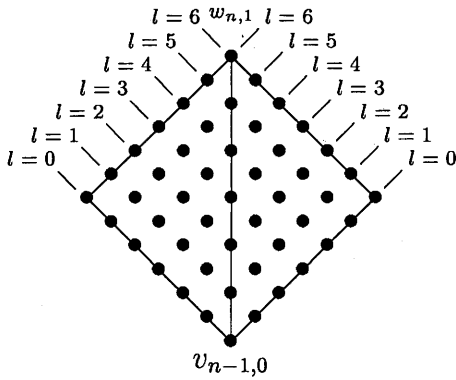


Abb. 4: Koeffizienten der Tetraeder T_{n,k_n-1} und T_{n,k_n} beim Anhängen einer Kette, $q = 6$.

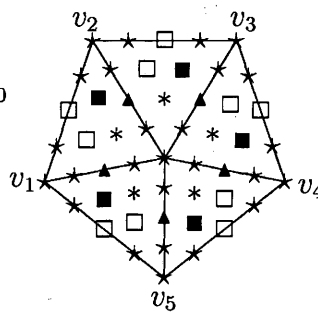
$F_B(\Delta_{n-1})$ gegeben. Die Koeffizienten mit $l = 4, \dots, 6$ ergeben sich durch die Koeffizienten entsprechend der Menge E_6^5 und der C^3 -Supersplineeigenschaft im Knoten $w_{n,1}$. Für $l = 2, 3$ sind die Koeffizienten aus folgenden Gründen eindeutig:

- ★: Supersplineeigenschaft im Knoten $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n}$,
- ▲: C^1 -Stetigkeit über den Flächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, w_{n,1})$,
- *: durch LGS mit C^1 -Stetigkeit über den Flächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, w_{n,1})$, $i = 1, \dots, 5$,
- : Die Menge D_6 ,
- : C^1 -Stetigkeit über der Fläche $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, w_{n,1})$ mit den Koeffizienten □,
- : Die Menge E_6^5 ,
- : Supersplineeigenschaft im Knoten $w_{n,1}$ mit den Koeffizienten ○.

seitlich:



von oben, $l = 2$:



von oben, $l = 3$:

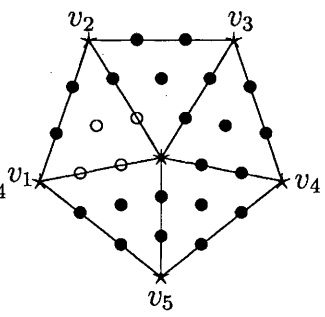


Abb. 5: Koeffizienten einer angehängten Halbzelle für $q = 6$ und $d = 5$.

Korollar 4.3:

Für $q \geq 6$ gilt

$$\dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_0)) = \binom{q+3}{3} = \frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6},$$

und

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)) &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + (k_n - 1)\#A_q + \#B_q + \#C_q \\ &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + \begin{cases} 23k_n + 1, & q = 6 \\ k_n \left[\binom{q+1}{3} - 12 \right] + \binom{q-1}{3} - q - 3, & q \geq 7, \end{cases} \end{aligned}$$

falls eine Kette an die Subtetraederzerlegung angehängt wird, sowie

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)) &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + (k_n - 1)\#D_q + \#E_q^d \\ &= \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})) + \begin{cases} 2k_n + 19 - d, & q = 6 \\ k_n \left[\binom{q-3}{3} + 2\binom{q-3}{2} - 6 \right] + 3q + 1, & q \geq 7, \end{cases} \end{aligned}$$

falls eine Halbzelle an die Subtetraederzerlegung angehängt werden.

5. Hermite-Interpolation

In diesem Abschnitt geben wir Hermite-Interpolationsmengen für Splineräume $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$, $q \geq 6$ auf der in Paragraph 3 definierten Klasse von Tetraederzerlegungen Δ an. Dazu wählen wir induktiv Interpolationsbedingungen in den Knoten der angehängten Tetraeder einer Kette oder Halbzelle. Der interpolierende Spline wird damit Schritt für Schritt berechnet.

Zuerst formulieren wir eine Aussage über die dritten partiellen Ableitungen eines Polynoms. Sei $p \in \mathcal{P}_q$, $q \geq 6$ gegeben, $z \in \mathbb{R}^3$ und $X = \{d, d_1, \dots, d_{k_n}\} \subset \mathbb{R}^3$ für $k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$ eine Menge von Einheitsvektoren derart, dass je drei dieser Vektoren linear unabhängig sind. Die Menge H^i , $i = 3, 5, 7, 9$ enthalte die Bedingungen $p_{d^3}(z) = 0$ für alle $d \in X$ und außerdem

- $p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(z) = 0$ für $u, v, w \leq 2$; $u + v + w = 3$; $(u, v, w) \neq (0, 1, 2)$, falls $d = 3$,
- $p_{d_1^{3-\rho} d_2^\rho}(z) = 0$, $\rho = 1, 2$ und $p_{d_1^{2-\rho} d_2^\rho d_3}(z) = 0$, $\rho = 0, 1$, falls $d = 5$, und
- $p_{d_1^2 d_2}(z) = 0$ und $p_{d_1 d_2^2}(z) = 0$, falls $d = 7$.

Lemma 5.1:

Sei $q \geq 6$, $z \in \mathbb{R}^3$ und $p \in \mathcal{P}_q$. Dann folgt aus den homogenen Interpolationsbedingungen in H^i , $i \in \{3, 5, 7, 9\}$, dass $D^3 p(z) \equiv 0$.

Beweis:

Sei $\{d_1, \dots, d_3\}$ eine Menge linear unabhängiger Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 . Dann kann jeder Einheitsvektor $d \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination

$$d = \frac{\sin(\tilde{\alpha}_1)}{\sin(\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1)} d_1 + \frac{\sin(\tilde{\alpha}_2)}{\sin(\alpha_2 + \tilde{\alpha}_2)} d_2 + \frac{\sin(\tilde{\alpha}_3)}{\sin(\alpha_3 + \tilde{\alpha}_3)} d_3$$

dargestellt werden. Dabei ist α_j für $j = 1, \dots, 3$ der von d_j und d eingeschlossene Winkel und $\tilde{\alpha}_j$ der in der d, d_j -Ebene von d und der von den anderen beiden Vektoren erzeugten Ebene eingeschlossene Winkel. Daraus ergibt sich

$$d^3 = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\sin(\tilde{\alpha}_j) \cdot d_j}{\sin(\alpha_j + \tilde{\alpha}_j)} \right)^3.$$

Durch die gegebenen Bedingungen in H^i entlang der Vektoren in X sowie an die gemischten partiellen Ableitungen existieren insgesamt genau zehn homogene Interpolationsbedingungen für die dritten Ableitungen von p . Da je drei Vektoren in X linear unabhängig sind, lassen sich die fehlenden partiellen Ableitungen von $D^3 p(z)$ für alle $i \in \{3, 5, 7, 9\}$ durch ein lineares Gleichungssystem eindeutig berechnen. Damit folgt die Behauptung.

#

Wir definieren nun für einen Tetraeder $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ Mengen von Interpolationsbedingungen, die wir in analoger Weise den Tetraedern von Δ zuordnen wie in Paragraph 4 die gleichnamigen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten. Sei $f \in C(\Omega)$ eine genügend oft differenzierbare Funktion und d_j für $j = 1, \dots, 3$ ein Einheitsvektor entlang der Kante $e_j = [v_4, v_j]$. Dann setzen wir:

$$Q_q : D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, q, \quad q \geq 6,$$

$$\begin{aligned} A_q : D^w p(v_4) &= D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, q-2, \quad q \geq 6, \\ \text{außer: } p_{d_j^\rho}(v_4) &= f_{d_j^\rho}(v_4), \quad \rho = q-2, q-3; \quad j = 1, \dots, 3, \\ p_{d_j^{q-3} d_{j+1}}(v_4) &= f_{d_j^{q-3} d_{j+1}}(v_4), \quad j = 1, \dots, 3, \\ p_{d_j^{q-3} d_{j-1}}(v_4) &= f_{d_j^{q-3} d_{j-1}}(v_4), \quad j = 1, \dots, 3, \end{aligned}$$

$$B_q : \begin{cases} A_6 \setminus \{p_{d_1^2 d_2^2}(v_4) = f_{d_1^2 d_2^2}(v_4), p(v_4)_{d_2 d_3^2} = f(v_4)_{d_2 d_3^2}\}, & q = 6, \\ A_q \setminus \{p_{d_1^2 d_2^{q-4}}(v_4) = f_{d_1^2 d_2^{q-4}}(v_4), \dots, p_{d_1^{q-4} d_2^2}(v_4) = f_{d_1^{q-4} d_2^2}(v_4)\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$C_q : \{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid u, v \leq q-5; 2 \leq w \leq q-5; 4 \leq u+v+w \leq q-2\}, \quad q \geq 6,$$

$$D_q : \begin{cases} \{p_{d_2^2 d_3^2}(v_4) = f_{d_2^2 d_3^2}(v_4), p_{d_1 d_2^2 d_3}(v_4) = f_{d_1 d_2^2 d_3}(v_4)\}, & q = 6, \\ \{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid 2 \leq v \leq q-4; w \geq 1; u+v+w = q-2\} \\ \cup \{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid 2 \leq v \leq q-4; 4 \leq u+v+w \leq q-3\}, & q \geq 7, \end{cases}$$

$$E_q^d : \left\{ \begin{array}{l} D_6 \cup D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, 2 \\ \cup \left\{ \begin{array}{l} \{p_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) = f_{d_1^u d_2^v d_3^w}(v_4) \mid u, v, w \leq 2; \\ u + v + w = 3; (u, v, w) \neq (0, 1, 2)\}, \quad d = 3, \\ \\ \{p_{d_1^{3-\rho} d_2^\rho}(v_4) = f_{d_1^{3-\rho} d_2^\rho}(v_4), \rho = 1, 2; \\ p_{d_1^{2-\rho} d_2^\rho d_3}(v_4) = f_{d_1^{2-\rho} d_2^\rho d_3}(v_4), \rho = 0, 1\}, \quad d = 5, \\ \\ \{p_{d_1^2 d_2}(v_4) = f_{d_1^2 d_2}(v_4); p_{d_1 d_2^2}(v_4) = f_{d_1 d_2^2}(v_4)\}, \quad d = 7, \\ \\ \emptyset, \quad d = 9, \end{array} \right. \right\} \quad q = 6, \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} D_q \cup \{p_{d_1^\rho}(v_4) = f_{d_1^\rho}(v_4), \rho = 4, \dots, q-4\} \cup D^w p(v_4) = D^w f(v_4), \quad w = 0, \dots, 3 \\ \cup \{p_{d_1^\rho d_m}(v_4) = f_{d_1^\rho d_m}(v_4), \quad \rho = 3, \dots, q-4; m = 2, 3\}, \quad q \geq 7. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Theorem 5.2:

Sei $q \geq 6$, Δ wie in Paragraph 3 konstruiert und H_q die Menge aller in den Knoten von Δ gewählten Interpolationsbedingungen. Dann ist H_q eine Hermite-Interpolationsmenge für den Splineraum $S_q^{1,3}(\Delta)$.

Beweis:

Nach Konstruktion der Mengen A_q, B_q, C_q, D_q und E_q^d gilt

$$\dim(S_q^{1,3}(\Delta)) = \#M_q = \#H_q, \quad q \geq 6.$$

Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also $f \equiv 0$ und für alle Tetraeder $T \in \Delta$ das Polynom $s|_T \equiv p^{[T]} \in \mathcal{P}_q$ gegeben. Im Starttetraeder $T_0 = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ folgt aus den Interpolationsbedingungen in v_4 , dass $p^{[T_0]} \equiv 0$. Sei jetzt bereits gezeigt, dass $s|_{\Omega_{n-1}} \equiv 0$, dann betrachten wir die Subtetraederzerlegung Δ_n . Wir unterscheiden folgende Fälle:

Fall 1: Anhängen einer Kette;

Für jede Seitenfläche T des Tetraeders $T_{n,0}$ ist $s|_T \in \mathcal{P}_q$ ein bivariates Polynom. Mit der C^1 -Stetigkeit über den Flächen von $F_B(\Delta_{n-1})$ und der Supersplineeigenschaft in den Eckpunkten von $T_{n,0}$ folgt aus den Interpolationsbedingungen in $w_{n,1}$ daher $s|_T \equiv 0$. Folglich gibt es ein trivariates Polynom $q^{[T_{n,0}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$, sodass sich $p^{[T_{n,0}]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,0}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,0}]}(z), \quad z \in T_{n,0}.$$

Dabei sind $E_4 = (a_4x + b_4y + c_4z + d_4)$ eine Ebene durch die Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,0})$ und $E_j = (a_jx + b_jy + c_jz + d_j)$ für $j = 1, \dots, 3$ Ebenen durch die anderen Seitenflächen

von $T_{n,0}$. Mit den verbleibenden Interpolationsbedingungen im Knoten $w_{n,1}$ folgt $q^{[T_{n,0}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,0}]} \equiv 0$. Mit analoger Argumentation gilt $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ für $m = 1, \dots, k_n - 2$. Sei d_i , $i \in \{1, 2\}$ für T_{n,k_n-1} ein Einheitsvektor entlang der Kante $[v_{n-1,i}, w_{n,k_n}]$. Da die drei Flächen $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$, $i = k-1, \dots, k_n+1$ in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, gilt wegen der C^1 -Stetigkeit über diesen Kanten $p_{d_1}^{[T_{n,k_n-1}]}(v) = p_{d_2}^{[T_{n,k_n-1}]}(v) = 0$ für alle $v \in [v_{n-1,1}, v_{n-1,2}]$. Für $q = 6$ liefert die Supersplineeigenschaft in w_{n,k_n} mit den gegebenen Interpolationsbedingungen in B_q , dass $D^r p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ für $r = 0, \dots, 2$. Mit der Supersplineeigenschaft in w_{n,k_n+1} folgt damit $s_{|[w_{n,k_n}, w_{n,k_n+1}]} \equiv 0$ und nach Lemma 2.3 schließlich $D^3 p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$. Für $q \geq 7$ folgt direkt aus der Supersplineeigenschaft in w_{n,k_n} mit den gegebenen Interpolationsbedingungen in B_q , dass $D^r p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ für $r = 0, \dots, 3$. Mit analoger Argumentation wie im Tetraeder $T_{n,0}$ folgt $p^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$. Im verbleibenden Tetraeder T_{n,k_n} gibt es wegen der Supersplineeigenschaft in den vier Eckpunkten, der C^1 -Stetigkeit über den Flächen $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,i})$, $i = k_n, k_n+1$, und den restlichen Interpolationsbedingungen im Knoten w_{n,k_n} ein Polynom $q^{[T_{n,k_n}]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T_{n,k_n}]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3^2 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,k_n}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n}.$$

Dabei sind E_3 eine Ebene durch die Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n})$, E_4 eine Ebene durch die Fläche $\Delta(v_{n-1,1}, v_{n-1,2}, w_{n,k_n+1})$ und E_i für $i = 1, \dots, 2$ Ebenen durch die anderen Seitenflächen von T_{n,k_n} . Mit den verbleibenden Interpolationsbedingungen im Knoten w_{n,k_n} folgt $q^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$. Insgesamt ergibt sich $s_{|\Omega_n} \equiv 0$.

Fall 2: Anhängen einer Halbzelle;

Seien $d_{i,w}$ und $d_{w,i}$ für $i = 0, \dots, k_n$ Einheitsvektoren entlang der Kante $e_{i,w} = [v_{n-1,i}, w_{n,1}]$ bzw. $e_{w,i} = [w_{n,1}, v_{n-1,i}]$, sowie $d_{i,j}$ für $i, j = \{0, \dots, k_n\}$ Einheitsvektoren entlang der Kante $e_{i,j} = [v_{n-1,i}, v_{n-1,j}]$. Wegen der C^1 -Stetigkeit über den Flächen in $F_B(\Delta_{n-1})$ verschwinden alle partiellen Ableitungen $p_{d_{i,w}}^{[T_{n,m}]}(v)$, $i = 0, 1$, $m = 0, \dots, k_n$ für alle Punkte v auf dem Rand von Ω_{n-1} . Die Supersplineeigenschaften in den Knoten $v_{n-1,j}$, $j = 0, \dots, k_n$ liefert außerdem $D^r p^{[T_{n,m}]}(v_{n-1,m}) \equiv D^r p^{[T_{n,m}]}(v_{n-1,0}) \equiv 0$ für $r = 0, \dots, 3$ und $m = 1, \dots, k_n$.

Für $q = 6$ folgt aus den Interpolationsbedingungen in E_q^d , dass $D^r p^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $r = 0, \dots, 2$, $m = 1, \dots, k_n$, und somit $s_{|e_{i,w}} \equiv 0$ für $i = 1, \dots, k_n$. Mit den restlichen Interpolationsbedingungen in E_q^d folgt nach Lemma 5.1 daraus $D^3 p^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$, $m = 1, \dots, k_n$. Für $q \geq 7$ impliziert die Supersplineeigenschaft in $w_{n,1}$ mit den Interpolationsbedingungen in E_q^d direkt $D^r p^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$, $r = 0, \dots, 3$, $m = 1, \dots, k_n$.

Da für $m = 1, \dots, k_n$ die drei Flächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m-1})$, $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, w_{n,1})$ und $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,m}, v_{n-1,m+1})$ nach Konstruktion in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, verschwinden mit der C^1 -Stetigkeit über diesen Kanten nach Lemma 2.1 und Lemma 2.3 auch die partiellen Ableitungen $p_{d_{m,w}^{[T_{n,m}]}}(v)$ für $m = 1, \dots, k_n$ und alle Punkte $v \in [v_{n-1,m}, v_{n-1,0}]$.

Die Interpolationsbedingungen in D_q und E_q^d implizieren $p_{d_{w,0}^{[T_{n,m}]}}(w_{n,1}) = 0$ für $i = 4, \dots, q-4$, $m = 1, \dots, k_n$ sowie $p_{d_{w,0}^{[T_{n,m}]}}(w_{n,1}) = 0$ für $i = 3, \dots, q-4$, $m = 1, 2$. Mit der C^1 -Stetigkeit über der Kante $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$ folgt nach Lemma 2.3 daraus $p_{d_{w,0}^{[T_{n,m}]}}(w_{n,1})$ für

$i = 3, \dots, q-4$, $m = 3, \dots, k_n$. Aus den Interpolationsbedingungen in D_q und E_q^d folgt $s|_T \equiv 0$ für alle $T \in F_I(\Delta_n \setminus \Delta_{n-1})$. Somit gibt es ein Polynom $q^{[T_{n,1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$, sodass sich $p^{[T_{n,1}]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T_{n,1}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,1}]}(z), \quad z \in T_{n,0},$$

wobei E_4 eine Ebene durch die Fläche $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,1}, v_{n-1,2})$ und E_i für $i = 1, \dots, 3$ Ebenen durch die anderen Seitenflächen von $T_{n,1}$ sind.

Da d ungerade ist, ergibt sich aus $p_{d_{w,0}^i, d_{w,m}^2}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$ für $i \in \{2, \dots, q-4\}$, $m = 1, \dots, k_n$ durch ein lineares Gleichungssystem $p_{d_{w,0}^i, d_{w,i}, d_{w,m+1}}^{[T_{n,m}]}(w_{n,1}) = 0$ für $i \in \{2, \dots, q-4\}$ und $m = 1, \dots, k_n$ (vgl. Alfeld, Piper und Schumaker [2]). Die restlichen Interpolationsbedingungen in E_q^d implizieren $q^{[T_{n,1}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,1}]} \equiv 0$. Mit analoger Argumentation folgt aus der C^1 -Stetigkeit über den Flächen $\Delta(v_{n-1,0}, v_{n,1,i}, w_{n,1})$, $i = 1, \dots, n$ und den Interpolationsbedingungen in D_q , dass $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$, $m = 2, \dots, k_n$ auf den verbleibenden Tetraedern von $\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$. Insgesamt gilt somit $s|_{\Omega_n} \equiv 0$.

#

6. Lagrange-Interpolation

Im Folgenden geben wir für $q \geq 6$ Lagrange-Interpolationsmengen für den Splineraum $S_q^{1,3}(\Delta)$ auf der in Paragraph 3 konstruierten Klasse von Tetraederzerlegungen Δ an. Dazu wählen wir Punkte im Starttetraeder und induktiv in den Tetraedern der angehängten Elemente. Für den Fall, dass im Induktionsschritt eine Kette angehängt wird, definieren Punktmengen Q_q , A_q , B_q und C_q , die wir in gleicher Weise den Tetraedern von Δ zuordnen wie in Paragraph 4 die gleichnamigen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten. Wird dagegen an die Subtetraederzerlegung eine Halbzelle angehängt, so wählen wir die Interpolationspunkte in den Tetraedern explizit. In beiden Fällen bestimmen wir den interpolierenden Spline zuerst auf den Kanten, dann auf den Seitenflächen und zuletzt im Innern der Tetraeder.

Wir definieren nun einige Interpolationsmengen für bivariate Polynome auf Dreiecken, die wir im Beweis des zentralen Theorems verwenden. Sei $q \geq 6$, $T = \Delta(v_1, v_2, v_3)$ ein Dreieck mit Kanten $e_{i,j} := [v_i, v_j]$, $1 \leq i, j \leq 3$, und das bivariate Polynom $p \in \mathcal{P}_q$ auf T definiert. Ferner seien Polynome auf den benachbarten Dreiecken von T bereits bestimmt, und es gebe Differenzierbarkeitsbedingungen über den Kanten von T . Dann wählen wir folgende Punktmengen L^i , $i = 1, \dots, 7$.

L^1 : wähle v_3 , jeweils $q-4$ Punkte im Innern der Kanten $e_{1,3}$, $e_{2,3}$ und der Strecke $l_1 := [v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$, sowie für $j = 2, \dots, q-4$ genau j Punkte auf einer zu l_1 parallelen Strecke l_j im Innern von T , falls eine C^1 -Bedingung über der Kante $e_{1,2}$ existiert.

L^2 : wähle v_3 , jeweils $q-4$ Punkte im Innern der Kanten $e_{1,3}$ und $e_{2,3}$, sowie $\binom{q-3}{2}$ Punkte

im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} erlauben, falls eine C^2 -Bedingung über der Kante $e_{1,2}$ existiert.

- L^3 : wähle $(q-7)_+$ Punkte im Innern der Kante $e_{2,3}$, $q-5$ Punkte im Innern der Strecke $l_1 := [v_3, \frac{v_1+v_2}{2}]$, sowie für $j = 2, \dots, q-5$ genau j Punkte auf einer zu l_1 parallelen Strecke l_j im Innern von T , falls C^1 -Bedingungen über den Kanten $e_{1,2}$ und $e_{1,3}$ existieren.
- L^4 : wähle $(q-7)_+$ Punkte im Innern der Kante $e_{2,3}$ und für $j = 2, \dots, q-5$ jeweils j Punkte auf einer zu $e_{1,2}$ parallelen Strecke l_j im Innern von T , falls eine C^2 -Bedingung über der Kante $e_{1,2}$ und eine C^1 -Bedingung über der Kante $e_{1,3}$ existiert.
- L^5 : wähle für $q \geq 7$ genau $(q-7)$ Punkte im Innern der Kante $e_{2,3}$ und $\binom{q-5}{2}$ Punkte im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-7} erlauben, falls C^2 -Bedingungen über den Kanten $e_{1,2}$ und $e_{1,3}$ existieren.
- L^6 : wähle für $q \geq 7$ genau $q-6$ Punkte im Innern der Strecken $l_1 := [v_3, \frac{2v_1+v_2}{3}]$ und $l_2 := [v_3, \frac{v_1+2v_2}{3}]$ sowie $\binom{q-5}{2}$ Punkte im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-7} erlauben, falls eine C^2 -Bedingung über der Kante $e_{1,2}$ und C^0 -Bedingungen über den Kanten $e_{1,3}$ und $e_{2,3}$ existieren, und es eine C^3 -Supersplineeigenschaft im Knoten v_3 gibt.
- L^7 : wähle genau $q-5$ Punkte im Innern der Strecken $l_1 := [v_3, \frac{2v_1+v_2}{3}]$ und $l_2 := [v_3, \frac{v_1+2v_2}{3}]$ sowie für $q \geq 7$ genau $q-4$ davon verschiedene Punkte im Innern der Strecke $l_3 := [v_2, \frac{v_1+v_3}{2}]$ und für $j = 4, \dots, q-4$ genau j Punkte auf einer zu l_3 parallelen Strecke l_j im Innern von T , falls eine C^1 -Bedingung über der Kante $e_{1,2}$ und C^0 -Bedingungen über den Kanten $e_{1,3}$ und $e_{2,3}$ existieren, und es eine C^3 -Supersplineeigenschaft im Knoten v_3 gibt.

Lemma 6.1:

Das in den Punkten von L^i , $i \in \{1, \dots, 7\}$ auf T interpolierende Polynom $p \in \mathcal{P}_q$ mit der jeweiligen Differenzierbarkeitsklasse über den Kanten von T ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Durch die jeweilig geforderte Differenzierbarkeit über den Kanten von T und der Supersplineeigenschaft im Eckpunkt v_3 existieren neben den Lagrange-Interpolationsbedingungen in L^i , $i = 1, \dots, 7$ zusätzliche Hermite-Interpolationsbedingungen. Es ist leicht zu sehen, dass die Gesamtanzahl der Interpolationsbedingungen der Dimension von \mathcal{P}_q entspricht. Es reicht daher zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also $p \in \mathcal{P}_q$ gegeben, und es gelte $p(z) = 0$ für alle $z \in L^i$, $i \in \{1, \dots, 7\}$. Ferner seien homogene C^1 -, C^2 - und C^3 -Superspline-Eigenschaften über den entsprechenden Kanten und Knoten gegeben. Dann gibt es ein Polynom $q \in \mathcal{P}_{q-\lambda}$ mit der Eigenschaft, dass sich p schreiben lässt als

$$p(z) = l_1^{\lambda_1} \cdot l_2^{\lambda_2} \cdot l_3^{\lambda_3} \cdot q(z), \quad z \in T,$$

wobei $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda$ und $l_j = (a_j x + b_j y + c_j)$ für $j = 1, \dots, 3$ eine Gerade durch die Kante $e_{j,j+1}$ ist. Die verbleibenden Interpolationsbedingungen auf T implizieren in allen

Fällen $q \equiv 0$ und damit insgesamt $p \equiv 0$.

#

Im Folgenden definieren wir Punktmenge für den Fall, dass im Induktionsschritt eine Kette an die Subtetraederzerlegung angehängt wird. Diese Mengen ordnen wir in analoger Weise den Tetraedern von Δ zu, wie in Paragraph 4 die gleichnamigen Mengen von Bézier-Bernstein-Punkten. Sei $T := \Delta(v_1, \dots, v_4)$ ein Tetraeder, dann bezeichnen wir mit $T^l := \Delta(v_i, v_j, v_k)$ für $l = 1, \dots, 4$, wobei $1 \leq l \neq i, j, k \leq 4$ die Seitenflächen von T und mit $e_{i,j} := [v_i, v_j]$, $1 \leq i, j \leq 4$ die Kanten von T . Wir setzen

- Q_q : $\binom{q+3}{3}$ Punkte im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_q erlauben. Dazu lege z.B. $q + 1$ parallele Ebenen e_1, \dots, e_{q+1} in T , lege j parallele Strecken $a_{j,1}, \dots, a_{j,j}$ auf die Ebene e_j und wähle i Punkte auf der Strecke $a_{j,i}$.
- A_q : $\binom{q}{2} - 6$ Punkte auf T^1 , $\binom{q-1}{2} - 4$ Punkte auf T^2 und $\binom{q-2}{2} - 2$ Punkte auf T^3 nach Lemma 6.1.1, sodass $s|_{T^i}$, $i = 1, \dots, 3$ eindeutig bestimmt ist. Zusätzlich $\binom{q-2}{3}$ Punkte im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} erlauben.
- B_q : $q = 6$: 9 Punkte auf T^1 und 6 Punkte auf T^2 nach Lemma 6.1.1 sowie 3 Punkte auf T^3 nach Lemma 6.1.2, sodass $s|_{T^i}$, $i = 1, \dots, 3$ eindeutig bestimmt ist. Zusätzlich 3 Punkte im Innern von T , die nicht alle auf einer Geraden liegen.
- $q \geq 7$: $\binom{q}{2} - 6$ Punkte auf T^1 und $\binom{q-1}{2} - 4$ Punkte auf T^2 nach Lemma 6.1.1, sowie $\binom{q-1}{2}$ Punkte auf T^3 nach Lemma 6.1.2, sodass $s|_{T^i}$, $i = 1, \dots, 3$ eindeutig bestimmt ist. Zusätzlich $\binom{q-2}{3}$ Punkte im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} erlauben.
- C_q : $q = 6$: je ein Punkt im Innern von $[v_3, v_4]$, T^1 , T^2 und von T .
- $q \geq 7$: $\binom{q-2}{2} - 6$ Punkte auf T^1 und $\binom{q-2}{2} - 5 - (7 - q)_+$ Punkte auf T^2 nach Lemma 6.1.3. Zusätzlich $\binom{q-3}{3}$ Punkte im Innern von T , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} erlauben.

Sei $q \geq 6$, L_{n-1} eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})$ und $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,i}, i = 0, \dots, k_n\}$ die Tetraederzerlegung die entsteht indem an Δ_{n-1} eine Kette angehängt wird. Ferner sei L_{K_n} die Vereinigung aller Punkte, die auf den Tetraedern $T_{n,0}, \dots, T_{n,k_n}$ gewählt wurden und $L_n^K := L_{n-1} \cup L_{K_n}$.

Lemma 6.2:

Sei $q \geq 6$. Dann ist L_n^K eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$.

Beweis:

Nach Konstruktion gilt $\#L_n^K = \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n))$. Somit reicht es zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$ mit $s|_{\Omega_{n-1}} \equiv 0$ gegeben, und es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in L_{K_n}$. Wir definieren $p^{[T]}(z) = s|_T \in \mathcal{P}_q$ für alle

Tetraeder $T \in \Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$.

Betrachten wir $T_{n,1}$. Aus den Interpolationsbedingungen in A_q zusammen mit der C^1 -Stetigkeit über der Fläche $T_{n,1}^4$ sowie der Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,1}$, $v_{n-1,2}$ und $w_{n,0}$ folgt nach Lemma 6.1, dass $s|_{T_{n,0}^i} \equiv 0$ für $i = 1, \dots, 4$. Daher existiert ein Polynom $q^{[T_{n,0}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ sodass sich $p^{[T_{n,0}]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,0}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,0}]}(z), \quad z \in T_{n,0},$$

wobei $E_j = (a_j x + b_j y + c_j z + d_j)$ für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche $T_{n,0}^j$ ist. Die verbleibenden Interpolationsbedingungen in A_q im Innern von $T_{n,0}$ liefern $q^{[T_{n,0}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,0}]} \equiv 0$. Mit analogem Argument folgt $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ für $m = 1, \dots, k_n - 2$.

Da die drei Flächen T_{n,k_n-1}^4 , T_{n,k_n-1}^3 und T_{n,k_n}^4 in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, folgt $p|_{d^2}^{[T_{n,k_n-1}]}(z) = 0$ für jeden Punkt $z \in [v_{n-1,0}, v_{n-1,1}]$ und jeden Einheitsvektor d der in der T_{n,k_n-1}^3 -Ebene liegt. Mit der Supersplineeigenschaft in den Eckpunkten von $T_{n,0}$, der C^1 -Stetigkeit über der Fläche $T_{n,0}^4$ impliziert dies nach Lemma 6.1, dass $s|_{T_{n,k_n-1}^i} \equiv 0$ für $i = 1, \dots, 4$. Also gibt es auch hier ein Polynom $q^{[T_{n,k_n-1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ sodass sich $p^{[T_{n,k_n-1}]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n-1}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,k_n-1}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n-1},$$

wobei E_j für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche T_{n,k_n-1}^j ist. Für $q = 6$ folgt aus der Supersplineeigenschaft im Knoten w_{n,k_n} , dass $D^w p^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 2$. Mit der Supersplineeigenschaft in w_{n,k_n+1} impliziert dies $p|_{e_{k_n+1,k_n}^j}^{[T_{n,k_n-1}]}(w_{n,k_n+1}) = 0$ für $j = 0, \dots, 3$ und damit $p|_{e_{k_n,k_n+1}}^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$. Insgesamt ergibt sich daraus $D^3 p^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$ nach Lemma 2.1 und Lemma 2.3. Aus restlichen Interpolationsbedingungen in B_6 folgt daher $q^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$. Für $q \geq 7$ folgt $q^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$ direkt aus den verbleibenden Interpolationsbedingungen in B_q . In beiden Fällen gilt impliziert dies $p^{[T_{n,k_n-1}]} \equiv 0$.

Im verbleibenden Tetraeder T_{n,k_n} folgt aus der C^1 -Stetigkeit über den Flächen T_{n,k_n}^3 und T_{n,k_n}^4 , der Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,0}$, $v_{n-1,1}$, w_{n,k_n} und w_{n,k_n+1} , sowie den Interpolationsbedingungen in C_q im Innern der Flächen nach Lemma 6.1, dass $s|_{T_{n,k_n}^i} \equiv 0$ für $i = 1, \dots, 4$. Daher gibt es ein Polynom $q^{[T_{n,k_n}]} \in \mathcal{P}_{q-6}$, sodass sich $p^{[T_{n,k_n}]}$ schreiben lässt als

$$p^{[T_{n,k_n}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3^2 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,k_n}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n},$$

wobei E_j für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche T_{n,k_n}^j ist. Die verbleibenden Interpolationsbedingungen in C_q liefern $q^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$. Insgesamt gilt $s \equiv 0$.

#

Im Folgenden geben wir zwei Interpolationsmengen für trivariate Polynome auf einem einzelnen Tetraeder an, die wir später verwenden. Sei $q \geq 6$, $T = \Delta(v_1, \dots, v_4)$ ein Tetraeder mit Seitenflächen $T^l = \Delta(v_i, v_j, v_k)$, $1 \leq l \neq i, j, k \leq 4$ und Kanten $e_{i,j} = [v_i, v_j]$, $1 \leq i, j \leq 4$, sowie $p \in \mathcal{P}_q$ gegeben, wobei $p|_{T^l}$, $l = 1, \dots, 4$ bereits bestimmt sei. Ferner seien die Polyno-

me auf den benachbarten Tetraedern von T bereits bestimmt, und es gebe Differenzierbarkeitsbedingungen über den Flächen von T . Dann definieren wir Punktmengen L^i , $i = 1, 2$ wie folgt

L^1 : definiere $q - 4$ zu T^4 parallele Flächen E_2, \dots, E_{q-3} in T und lege jeweils $\binom{j+1}{2}$ Punkte in E_j , sodass das bivariate Polynom $s|_{E_j} \in \mathcal{P}_{j-1}$ eindeutig bestimmt ist, falls eine C^1 -Bedingung über der Fläche T^4 existiert

L^2 : Existiert eine C^1 -Bedingung über der Fläche T^4 und eine C^3 -Supersplineeigenschaft im Knoten v_4 , so definiere die Fläche $E_{q-3} := \Delta(v_4, \frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1+v_3}{2})$ sowie $q - 4$ zu T^4 parallele Flächen E_2, \dots, E_{q-4} in T , lege $q - 4$ parallele Strecken l_2, \dots, l_{q-3} in E_{q-3} und wähle genau j Punkte im Innern von l_j . Außerdem wähle für $j = 2, \dots, q - 4$ jeweils $\binom{j+1}{2}$ Punkte in E_j , sodass das bivariate Polynom $s|_{E_j} \in \mathcal{P}_{j-1}$ eindeutig bestimmt ist.

Lemma 6.3:

Das in den Punkten von L^i , $i \in \{1, 2\}$ auf T interpolierende Polynom $p \in \mathcal{P}_q$ ist mit den entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen eindeutig festgelegt.

Beweis:

Durch die jeweilig geforderte Differenzierbarkeit über den Flächen von T und der Supersplineeigenschaft im Eckpunkt v_4 existieren neben den Lagrange-Interpolationsbedingungen in L^i , $i = 1, 2$ zusätzliche Hermite-Interpolationsbedingungen. Es ist leicht zu sehen, dass die Gesamtanzahl der Interpolationsbedingungen der Dimension des trivariaten Polynomraums \mathcal{P}_q entspricht. Es reicht daher zu zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Sei also $p \in \mathcal{P}_q$ gegeben, und es gelte $p(z) = 0$ für alle $z \in L^i$, $i \in \{1, 2\}$. Ferner seien homogene Hermite-Interpolationsbedingungen über den entsprechenden Flächen gegeben. In beiden Fällen gibt es ein Polynom $q \in \mathcal{P}_{q-5}$, sodass sich p schreiben lässt als

$$p(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4^2 \cdot q(z), \quad z \in T,$$

wobei E_j für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche T^j ist. Für L^2 folgt aus der Supersplineeigenschaft in v_4 mit den Interpolationsbedingungen auf der Ebene E_{q-3} aus $D^w p(v_4) = 0$ für $w = 0, \dots, 3$, dass $q(v_4) = 0$. In beiden Fällen implizieren die restlichen Interpolationsbedingungen im Innern von T , dass $q \equiv 0$ und damit $p \equiv 0$.

#

Jetzt betrachten wir den Fall, in dem an die Subtetraederzerlegung im Induktionsschritt eine Halbzelle angehängt wird. Sei Δ_{n-1} gegeben und $\Delta_{v_{n-1,0}}$ für $k_n \in \{3, 5, 7, 9\}$ eine Zelle auf dem Rand von Ω_{n-1} mit Knoten $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,k_n} \in V_B(\Delta_{n-1})$. Im n -ten Induktionsschritt wird eine Halbzelle $\{T_{n,i}, i = 1, \dots, k_n\}$ bestehend aus den Tetraedern $T_{n,i} := \Delta(v_{n-1,0}, v_{n-1,i}, v_{n-1,i+1}, w_{n,1})$ mit einem neuen Knoten $w_{n,1}$ angehängt. Dann definiere die Punktmenge L_{H_n} wie folgt:

- 1.) Wähle $w_{n,1}$ und jeweils $q - 4$ Punkte im Innern der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 0, \dots, 2$. Außerdem wähle für $k_n =$
 - 3 : $\binom{q-3}{2}$ Punkte jeweils im Innern der Flächen $T_{n,1}^2$ und $T_{n,1}^3$, die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} erlauben, $\binom{q-2}{2} - 2$ Punkte nach Lemma 6.1.1 im Innern der Fläche $T_{n,1}^1$ und $q - 6$ Punkte im Innern der Kante $[w_{n,1}, v_{n-1,3}]$.
 - 5 : $\binom{q-3}{2}$ Punkte jeweils im Innern der Flächen $T_{n,1}^2$ und $T_{n,1}^3$, die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} erlauben, $q - 5$ Punkte im Innern der Kante $[w_{n,1}, v_{n-1,3}]$, und jeweils $q - 6$ Punkte im Innern der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 4, 5$.
 - 7 : $\binom{q-3}{2}$ Punkte im Innern von $T_{n,1}^3$, die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-5} erlauben, jeweils $q - 5$ Punkte im Innern der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 3, 4$, und jeweils $q - 6$ Punkte im Innern der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 5, \dots, 7$.
 - 9 : jeweils $q - 5$ Punkte im Innern der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 3, \dots, 5$ sowie jeweils $q - 6$ Punkte im Innern der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 6, \dots, 9$.
- 2.)
 - a) Wähle genau $\binom{q-3}{2} - 1$ Punkte nach Lemma 6.1.7 im Innern von $T_{n,1}^1$, falls $k_n \geq 5$, sowie $\binom{q-2}{2} - 5 - (7 - q)_+$ Punkte nach Lemma 6.1.3 im Innern von $T_{n,m}^1$ für $m = 2, \dots, k_n - 1$ und $\binom{q-4}{2}$ Punkte im Innern von T_{n,k_n}^1 , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} erlauben.
 - b) Wähle $\binom{q-3}{2} - 3$ Punkte nach Lemma 6.1.6 jeweils im Innern der Flächen $T_{n,m}^3$ für
$$m = \begin{cases} 2, & \text{falls } k_n = 7 \\ 1, 2, & \text{falls } k_n = 9, \end{cases}$$
sowie $\binom{q-4}{2} - 1$ Punkte nach Lemma 6.1.4 jeweils im Innern der Flächen $T_{n,m}^3$ für $m = 3, \dots, k_n - 1$.
 - c) Für $q \geq 7$ wähle $\binom{q-5}{2}$ Punkte im Innern von T_{n,k_n}^3 , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-7} erlauben.
- 3.) Wähle $\binom{q-2}{3} - 2$ Punkte nach Lemma 6.1.2 im Innern von $T_{n,1}$, sodass $s|_{T_{n,1}}$ eindeutig bestimmt ist.
- 4.) Wähle $\binom{q-3}{3}$ Punkte jeweils im Innern von $T_{n,m}$ für $m = 2, \dots, k_n - 1$, die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-6} erlauben.
- 5.) Für $q \geq 7$ wähle $\binom{q-4}{3}$ Punkte im Innern von T_{n,k_n} , die eine eindeutige Interpolation mit \mathcal{P}_{q-7} erlauben.

Es gelte $q \geq 6$. Sei L_{n-1} eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})$ und $\Delta_n := \Delta_{n-1} \cup \{T_{n,i}, i = 1, \dots, k_n\}$ die aus Δ_{n-1} entstehende Tetraederzerlegung indem eine Halbzelle angehängt wird. Ferner sei $L_n^H := L_{n-1} \cup L_{H_n}$.

Lemma 6.4:

Sei $q \geq 6$. Dann ist L_n^H eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$.

Beweis:

Nach Konstruktion gilt $\#L_n^H = \dim(\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n))$. Wir zeigen, dass das homogene Interpolationsproblem nur trivial lösbar ist. Seien dazu $\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$ und L_{H_n} wie oben definiert, $s \in \mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$ mit $s|_{\Omega_{n-1}} \equiv 0$ gegeben, und es gelte $s(z) = 0$ für alle $z \in L_{H_n}$. Wir setzen $p^{[T]} \equiv s|_T \in \mathcal{P}_q$ für alle Tetraeder $T \in \Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$.

Wegen der C^1 -Stetigkeit über der Fläche $T_{n,1}^4$ und der Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,0}, \dots, v_{n-1,2}$ gilt $D^w p^{[T_{n,1}]}(z) \equiv 0$ für $w = 0, 1$ und alle z auf dem Rand von Ω_{n-1} , sowie $D^w p^{[T_{n,1}]}(v_{n-1,i}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$, $i = 0, \dots, 2$. Wir zeigen zunächst, dass auch $D^w p^{[T_{n,1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$.

$k_n = 3$: Durch die Interpolationsbedingungen in 1.) folgt nach Lemma 6.1, dass $p|_{T_{n,1}^j}^{[T_{n,1}]} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, 3$. Daraus folgt $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 2$. Die Interpolationsbedingungen in 1.) auf der Kante $[w_{n,1}, v_{n-1,3}]$ sowie die Supersplineeigenschaft im Knoten $v_{n-1,3}$ implizieren damit $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,3}]} \equiv 0$, also insbesondere $p_{d^3}^{[T_{n,1}]} = 0$ für einen Einheitsvektor d entlang der Kante $[w_{n,1}, v_{n-1,3}]$. Nach Lemma 5.1 folgt daraus $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$.

$k_n = 5$: Durch die Interpolationsbedingungen in 1.) folgt nach Lemma 6.1, dass $p|_{T_{n,1}^j}^{[T_{n,1}]} \equiv 0$ für $j = 2, 3$. Dies impliziert $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$, $w = 0, 1$. Zusammen mit der Supersplineeigenschaft im Knoten $v_{n-1,3}$ gilt $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,3}]} \equiv 0$ und damit $p_{d^2}^{[T_{n,1}]} = 0$. Daraus folgt $D^2 p^{[T_{n,1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$. Die Interpolationsbedingungen auf den Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 4, 5$ liefern mit den Supersplineeigenschaften in den Knoten $v_{n-1,4}$ und $v_{n-1,5}$, dass $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,j}]} \equiv 0$ für $j = 4, 5$. Dies impliziert $s_{d_i^3}(w_{n,1}) = 0$ für zwei Einheitsvektoren d_i , $i = 4, 5$ entlang der Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,i}]$ und nach Lemma 5.1 damit $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$.

$k_n = 7$: Durch die Interpolationsbedingungen in 1.) folgt nach Lemma 6.1, dass $p|_{T_{n,1}^3}^{[T_{n,1}]} \equiv 0$. Die Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,3}$ und $v_{n-1,4}$ zusammen mit den Interpolationsbedingungen in 1.) auf den Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 3, 4$ implizieren $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,j}]} \equiv 0$ für $j = 3, 4$ und damit $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$, $w = 0, \dots, 2$. Die Interpolationspunkte in 1.) auf den Kanten $[w_{n,1}, v_{n-1,j}]$, $j = 5, \dots, 7$ und die Supersplineeigenschaften in den Knoten $v_{n-1,5}, \dots, v_{n-1,7}$ liefern $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,j}]} \equiv 0$ für $j = 5, \dots, 7$. Nach Lemma 5.1 impliziert dies $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$.

$k_n = 9$: Die Interpolationsbedingungen in 1.) implizieren $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,j}]} \equiv 0$, $j = 0, \dots, 2$ und damit $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, 1$. Mit der Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,j}$, $j = 3, \dots, 5$ und den Interpolationspunkten in 1.) folgt $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,j}]} \equiv 0$, $j = 3, \dots, 5$, also $D^2 p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$. Durch die verbleibenden Bedingungen in 1.) sowie der Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,j}$, $j = 6, \dots, 9$ folgt $s|_{[w_{n,1}, v_{n-1,j}]} \equiv 0$ für $j = 6, \dots, 9$. Nach Lemma 5.1 ergibt sich $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$. \square

Aus der Supersplineeigenschaft in den Knoten $v_{n-1,j}$, $j = 0, \dots, k_n$ und $D^w p^{[T_{n-1}]}(w_{n,1}) \equiv 0$ für $w = 0, \dots, 3$ folgt mit den Interpolationsbedingungen in 2.a) bzw. 2.b) nach Lemma 6.1,

dass $s|_{T_{n,j}^1} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, k_n$ und $s|_{T_{n,j}^3} \equiv 0$ für $j = 1, \dots, k_n - 1$. Da die drei Flächen T_{n,k_n-1}^3 , T_{n,k_n}^3 und $T_{n,1}^3$ in paarweise verschiedenen Ebenen liegen, gilt $p_{d^2}^{[T_{n,k_n}]}(z) = 0$ für alle $z \in [w_{n,1}, v_{n-1,0}]$ und alle Einheitsvektoren d in der T_{n,k_n}^3 -Ebene. Mit den Interpolationsbedingungen in 2.c) sowie der Supersplineeigenschaft in den Eckpunkten von T_{n,k_n}^3 impliziert dies $s|_{T_{n,k_n}^3} \equiv 0$ nach Lemma 6.1.

Sei d jetzt ein Einheitsvektor entlang der Kante $[v_{n-1,0}, w_{n,1}]$ und d_j für $j = 1, \dots, k_n$ ein Einheitsvektor entlang $[v_{n-1,0}, v_{n-1,j}]$. Es gilt wie bereits gezeigt $s_{d^2 d_n^2}(v_{n-1,0}) = 0$ für $m = 1, \dots, k_n$. Durch ein lineares Gleichungssystem folgt daraus (vgl. Hermite-Interpolation) $s_{d^2 d_m d_{m+1}}(v_{n-1,0}) = 0$ für $m = 1, \dots, k_n$.

Da der interpolierende Spline auf jeder Fläche von $T_{n,1}$ verschwindet, gibt es ein Polynom $q^{[T_{n,1}]} \in \mathcal{P}_{q-5}$ mit der Eigenschaft, dass sich $p^{[T_{n,1}]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T_{n,1}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,1}]}(z), \quad z \in T_{n,1},$$

wobei E_j für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche $T_{n,1}^j$ ist. Mit den Interpolationsbedingungen in 3.) folgt nach Lemma 6.3, dass $q^{[T_{n,1}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,1}]} \equiv 0$.

Im Tetraeder $T_{n,2}$ gibt es wegen der C^1 -Stetigkeit über den Flächen $T_{n,2}^3$ und $T_{n,2}^4$ ein Polynom $q^{[T_{n,2}]} \in \mathcal{P}_{q-6}$ mit der Eigenschaft, dass sich $p^{[T_{n,2}]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T_{n,2}]}(z) = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3^2 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,2}]}(z), \quad z \in T_{n,2},$$

wobei E_j für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche $T_{n,2}^j$ ist. Folglich implizieren die Interpolationsbedingungen in 4.) nach Lemma 6.3, dass $q^{[T_{n,2}]} \equiv 0$ und damit $p^{[T_{n,2}]} \equiv 0$. Mit analogem Argument gilt $p^{[T_{n,m}]} \equiv 0$ für $m = 3, \dots, k_n - 1$.

Auf dem verbleibenden Tetraeder T_{n,k_n} folgt für $q = 6$ aus der C^1 -Stetigkeit über den Flächen T_{n,k_n}^j , $j = 2, \dots, 4$, dass $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$. Für $q \geq 7$ gibt es ein Polynom $q^{[T_{n,k_n}]} \in \mathcal{P}_{q-7}$ mit der Eigenschaft, dass sich $p^{[T_{n,k_n}]}$ schreiben läßt als

$$p^{[T_{n,k_n}]}(z) = E_1 \cdot E_2^2 \cdot E_3^2 \cdot E_4^2 \cdot q^{[T_{n,k_n}]}(z), \quad z \in T_{n,k_n},$$

wobei E_j für $j = 1, \dots, 4$ eine Ebene durch die Fläche $T_{n,1}^j$ ist. Die Interpolationsbedingungen in 5.) liefern dann $q^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$ nach Lemma 6.3, also ebenfalls $p^{[T_{n,k_n}]} \equiv 0$. Insgesamt ergibt sich $s \equiv 0$ und damit die Behauptung.

#

Sei nun Δ eine in Paragraph 3 konstruierte Tetraederzerlegung und L die Menge aller Punkte, die im Starttetraeder und in den Tetraedern der angehängten Ketten und Halbzellen gewählt wurden.

Theorem 6.5:

Sei $q \geq 6$. Dann bildet L eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta)$.

Beweis:

Der Beweis verläuft induktiv. Die im Starttetraeder $T_0 = \Delta_0$ gewählten Punkte entsprechend der Menge Q_q und bilden nach Voraussetzung eine Interpolationsmenge für \mathcal{P}_q .

Angenommen es wurde bereits gezeigt, dass L_{n-1} eine Lagrange-Interpolationsmenge für $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_{n-1})$ ist. Entsteht Δ_n aus Δ_{n-1} durch Anhängen einer Kette, so bildet $L_n = L_n^K$ nach Lemma 6.2 eine Lagrange-Interpolationsmenge für den Splineraum $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$. Entsteht Δ_n aus Δ_{n-1} durch Anhängen einer Halbzelle, so bildet $L_n = L_n^H$ nach Lemma 6.4 eine Lagrange-Interpolationsmenge für $\mathcal{S}_q^{1,3}(\Delta_n)$. Da Δ nur mit Hilfe diese beiden Elemente konstruiert wird, folgt induktiv die Behauptung.

#

Literaturverzeichnis

- [1] P. Alfeld: A trivariate C^1 Clough-Tocher interpolation scheme, *Computer Aided Geometric Design* **1** (1984) 169-181.
- [2] P. Alfeld, B. Piper, L.L.Schumaker: An explicit basis for C^1 quartic bivariate splines, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **24** (1987) 891-911.
- [3] P. Alfeld, L.L. Schumaker, M. Sirvent: The dimension and existence of local bases for multivariate spline spaces, *Journal of Approximation Theory* **70** (1992) 243-264.
- [4] P. Alfeld, L.L. Schumaker, W. Whiteley: The generic dimension of the space of C^1 splines of degree $d \geq 8$ on tetrahedral decompositions, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **30** (1993) 889-920.
- [5] C. de Boor: A practical guide to splines, Springer Verlag, New York 1978.
- [6] C. de Boor: B-Form basics, in: G. Farin (Ed.): *Geometric Modeling*, SIAM, Philadelphia 1987, 131-148.
- [7] C.K. Chui: *Multivariate splines*, CBMS 54, SIAM, Philadelphia 1988.
- [8] C.K. Chui, R.H. Wang: On smooth multivariate spline functions, *Mathematical Computations* **41** (1983) 131-142.
- [9] O. Davydov, F. Zeilfelder: Scattered data fitting by direct extension of local polynomials to bivariate splines, in *Erscheinung*.
- [10] G. Farin: *Triangular Bernstein-Bézier Patches*, *Computer Aided Geometric Design* **3** (1986) 83-127.
- [11] M.-J. Lai: Scattered data interpolation and approximation using bivariate C^1 piecewise cubic polynomials, *Computer Aided Geometric Design* **13** (1996) 81-88.
- [12] M.-J. Lai, A. LeMéhauté: A new kind of trivariate C^1 spline, preprint, 2003.
- [13] G. Nürnberger: *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag, Berlin 1989.

- [14] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Interpolation by spline spaces on classes of triangulations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **119** (1999) 347-376.
- [15] G. Nürnberger, F. Zeilfelder: Developments in bivariate spline interpolation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **121** (2000) 125-152.
- [16] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, F. Zeilfelder: Local Lagrange interpolation by bivariate C^1 cubic splines, in: T. Lyche, L.L. Schumaker (Eds.): *Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000*, Vanderbilt University Press, Nashville 2001, 393-404.
- [17] G. Nürnberger, F. Zeilfelder, T. Hangelbroek, C. Rössl, H.-P. Seidel: On the Dimension of C^1 splines of arbitrary degree on a tetrahedral partition, in *Erscheinung*.
- [18] L.L. Schumaker: *Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York 1980, 553 p..
- [19] L.L. Schumaker: Bounds on the dimension of spaces of multivariate piecewise polynomials, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **14** (1984) 251-264.
- [20] L.L. Schumaker: Dual bases for spline spaces on a cell, *Computer Aided Geometric Design* **5** (1987) 277-284.
- [21] L.L. Schumaker, T. Sorokina: Quintic spline interpolation on Type-4 tetrahedral partitions, preprint, 2003
- [22] M. Sirvent: Doktorarbeit, Universität Vanderbilt.
- [23] A. Worsey, G. Farin: An n-dimensional Clough-Tocher interpolant, *Constructive Approximation* **3,2** (1987) 99-110.
- [24] A. Ženišek: Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method, *Journal of Approximation Theory* **7** (1973) 334-351.